

6. Aufgabenblatt: Analysis 2

Lehrkräfteweiterbildung, 12 Q, Winter 2023/24

Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 6.1 Zeigen Sie: für alle $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$ gilt die *Umgekehrte Dreiecksungleichung*:

$$| |\bar{x} - \bar{z}| - |\bar{y} - \bar{z}| | \leq |\bar{x} - \bar{y}|$$

Aufgabe 6.2 Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung

$$f(x, y) = \frac{xy}{|xy|}$$

Zeigen Sie:

- 1) Die Punkte $\bar{a} = (0, 0)$, $\bar{b} = (1, 0)$ und $\bar{c} = (0, 1)$ liegen im Abschluss \bar{D} von D .
- 2) Die Grenzwerte von f bei \bar{a} , \bar{b} bzw. \bar{c} existieren nicht.

Aufgabe 6.3 Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} y & \text{falls } x \geq 0, \\ -y & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f in den Punkten $\bar{a} = (0, 0)$ bzw. $\bar{c} = (0, 1)$ stetig ist.

Aufgabe 6.4 Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2/(x^2 + y^2) & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$g(x, y) = y f(x, y).$$

Zeigen Sie:

- 1) f ist in den Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig, und im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig.
- 2) g ist (in allen Punkten) stetig.